Exercice 1. *Exercice en partie de révision sur les polynômes de matrices et d'endomorphismes. Vous devriez pouvoir faire cet exercice sans consulter vos notes de cours.*

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Définir rigoureusement la matrice $P(A)$.
2. Définir ensuite $P(f)$ pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(V)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V.
3. Calculer $P(A)$ pour $P = X^3 - X - 4$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
5. Prouver que si P et Q sont deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$, alors les endomorphismes $P(f)$ et $Q(f)$ commutent, i.e. $P(f)\circ Q(f) = Q(f)\circ P(f)$.
6. Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $f \in \mathscr{L}(V)$, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$.
7. Rappeler ce qu'est un sous-espace vectoriel $W \subset V$ *invariant* (ou *stable*) par $f \in \mathscr{L}(V)$.
8. Prouver que $\mathrm{Ker}(P(f))$ est invariant par f pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 2. Prouver que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

est triangulable sur $\mathbb{R}$ mais non diagonalisable, même sur $\mathbb{C}$.

Trouver ensuite le polynôme minimal de A.

Exercice 3. Répondre à chacune des questions suivantes en cochant la case correcte (une seule réponse est correcte).

a) Si le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est de degré d, que peut-on dire de d ?
☐ d divise n.
☐ $d \leq n$.
☐ Il y a des cas où $d > n$.

b) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ avec polynôme caractéristique scindé $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont distincts. Est-ce que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r = \mathrm{Tr}(A)$?
☐ Oui, toujours.
☐ Non, jamais.
☐ Oui si $r = n$ et si chaque $m_i = 1$.

Exercice 4. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ s'appelle *nilpotente* s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $A^m = 0$. Le plus petit m tel que $A^m = 0$ s'appelle l'*ordre de nilpotence*.

1. Quel est le polynôme minimal d'une matrice nilpotente d'ordre m ?
2. Prouver que si A est à la fois nilpotente et diagonalisable, alors $A = 0$.
3. Une matrice est *strictement triangulaire* si elle est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont nuls. Prouver que toute matrice strictement triangulaire est nilpotente (commencer à tester cette affirmation sur des exemples).

Exercice 5. Supposons que $N_1, N_2 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices nilpotentes qui commutent, prouver que $N_1 + N_2$ et $N_1 \cdot N_2$ sont aussi nilpotentes.

Puis montrer par un exemple que ces propriétés peuvent être fausses pour des matrices qui ne commutent pas.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformation linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (3x - y + z, 2x + z, x - y + 2z).$$

a) Montrer que $P_1 = (X-1)(X-2)^2 \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de f.
b) Qu'en est-il des polynômes $P_2 = (X-1)(X-2)$, $P_3 = (X-1)^2(X-2)$ et $P_4 = (X-1)^2(X-2)^2$?
c) Quel est le polynôme minimal de f ?

Exercice 7. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble

$$\mathscr{F} = C^\infty(\mathbb{R}) \cap \left\{\varphi(x) = (a + b\,x)e^x + (c + d\,x)e^{-x},\ \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}.$$

1. Prouver que $\mathscr{F}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Donner une base de $\mathscr{F}$ (justifier qu'il s'agit bien d'une base).
3. Prouver que l'opérateur de dérivation $D(\varphi) = \varphi'$ définit un endomorphisme de $\mathscr{F}$.
4. Écrire la matrice de D dans la base donnée en 2.
5. Calculer le polynôme caractéristique de D.
6. Trouver les valeurs propres et chercher leurs multiplicités géométriques.
7. L'opérateur D est-il diagonalisable ?
8. Trouver le polynôme minimal de D.

Exercice 8. Trouver toutes les fonctions propres généralisées de l'opérateur de dérivation $D = \dfrac{d}{dx}$ agissant sur l'espace vectoriel de fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ qui sont associées à la valeur propre $\lambda = 0$.

Exercice 9. On considère la matrice $H \in \mathrm{M}_4(\mathbb{Q})$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de H ?
2. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(H)$.
3. Que vaut $\det(H)$?
4. Calculer H^2.
5. A partir du calcul précédent, trouver un polynôme annulateur (non nul) de H.
6. Trouver le polynôme minimal de H et donner les valeurs propres de H.
7. La matrice H est elle diagonalisable sur le corps des rationnels ? (justifier votre réponse).